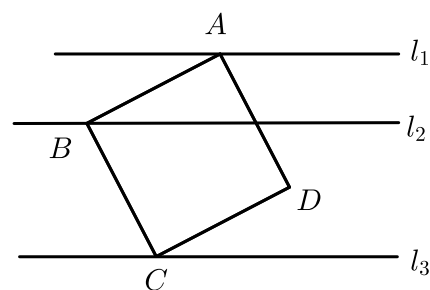


相似三角形进阶一（加油站）

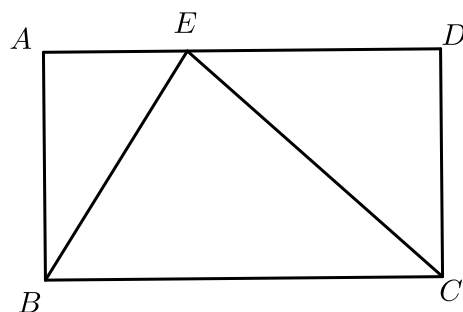
一、一线三垂直综合

1. 一线三垂直相似模型

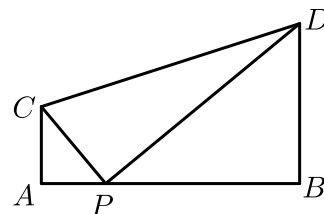
1. 如图，直线 $l_1//l_2//l_3$ ，正方形 $ABCD$ 的三个顶点 A 、 B 、 C 分别在 l_1 、 l_2 、 l_3 上， l_1 与 l_2 之间的距离是2， l_2 与 l_3 之间的距离是4，则正方形 $ABCD$ 的面积为 _____ ．



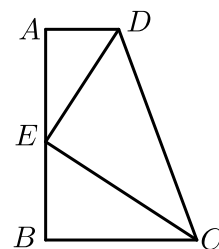
2. 在一块长为8、宽为 $2\sqrt{3}$ 的矩形中，恰好截出三块形状相同、大小不等的直角三角形，且三角形的顶点都在矩形的边上．其中面积最小的直角三角形的较短直角边的长是 _____ ．



3. 如图， $AC \perp AB$ ， $BD \perp AB$ ， $AB = 10$ ， $AC = 2$ ．用一个三角尺进行如下操作：将直角顶点 P 在线段 AB 上滑动，一直角边始终经过点 C ，另一直角边与 BD 相交于点 D ，若 $BD = 8$ ，求 AP 的长．

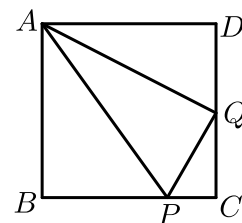


4. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB \perp BC$ ，点 E 在 AB 上， $\angle DEC = 90^\circ$ 。

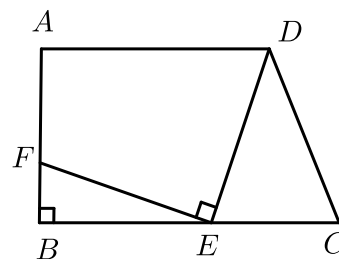


- (1) 求证： $\triangle ADE \sim \triangle BEC$.
 (2) 若 $AD = 1$ ， $BC = 3$ ， $AE = 2$ ，求 AB 的长 .

5. 已知：如图，在正方形 $ABCD$ 中， P 是 BC 上的点，且 $BP = 3$ ， $PC = 1$ ， Q 是 CD 的中点。求
 证：(1) $AQ \perp QP$ ；(2) $\triangle ADQ \sim \triangle AQP$.

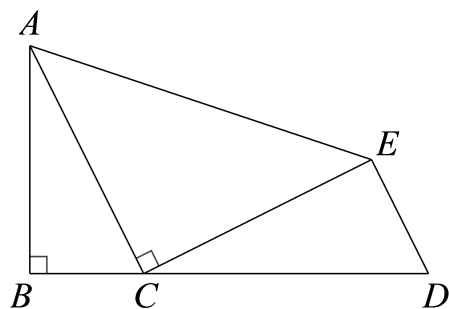


6. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，已知 $AD \parallel BC$ ， $\angle B = 90^\circ$ ， $AB = 7$ ， $AD = 9$ ， $BC = 12$ ，在线段 BC 上任取一点 E ，连接 DE ，做 $EF \perp DE$ ，交直线 AB 于点 F 。



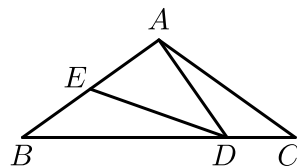
- (1) 若点 F 与 B 重合，求 CE 的长。
 (2) 若点 F 在线段 AB 上，且 $AF = CE$ ，求 CE 的长。

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $AB = 4$ ， $BC = 2$ ，以 AC 为边作 $\triangle ACE$ ， $\angle ACE = 90^\circ$ ， $AC = CE$ ，延长 BC 至点 D ，使 $CD = 5$ ，连接 DE 。求证： $\triangle ABC \sim \triangle CED$ 。



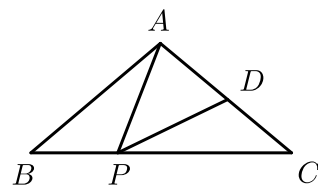
2. 一线三等角相似模型

8. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 5$ ， $BC = 8$ ， D 、 E 分别为 BC 、 AB 边上一点， $\angle ADE = \angle C$ 。



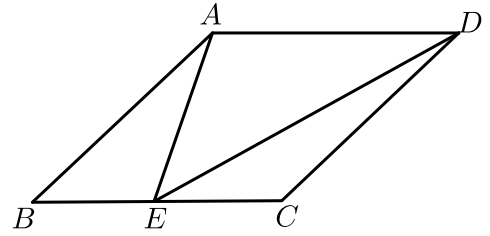
- (1) 求证： $\triangle BDE \sim \triangle CAD$.
(2) 若 $CD = 2$ ，求 BE 的长 .

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 P 、 D 分别是 BC 、 AC 边上的点，且 $\angle APD = \angle B$ 。



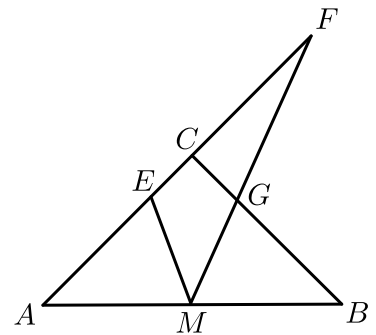
- (1) 求证： $AC \cdot CD = CP \cdot BP$.
(2) 若 $AB = 10$ ， $BC = 12$ ，当 $PD \parallel AB$ 时，求 BP 的长 .

10. 已知：如图，在菱形 $ABCD$ 中， E 为 BC 边上一点， $\angle AED = \angle B$ 。



- (1) 求证： $\triangle ABE \sim \triangle DEA$ 。
- (2) 若 $AB = 4$ ，求 $AE \cdot DE$ 的值。

11. 如图，已知：在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC = 4$ ， M 是边 AB 的中点， E 、 G 分别是边 AC 、 BC 上的一点， $\angle EMG = 45^\circ$ ， AC 与 MG 的延长线相交于点 F ，



- (1) 在不添加字母和线段的情况下写出图中一定相似的三角形，并证明其中的一对；
- (2) 联结 EG ，当 $AE = 3$ 时，求 EG 的长。

12. 如图1, $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 是两个全等的等腰直角三角形, $\angle BAC = \angle EDF = 90^\circ$, $\triangle DEF$ 的顶点 E 与 $\triangle ABC$ 的斜边 BC 的中点重合. 将 $\triangle DEF$ 绕点 E 旋转到如图2, 线段 DE 与线段 AB 相交于点 P , 线段 EF 与线段 CA 的延长线相交于点 Q .

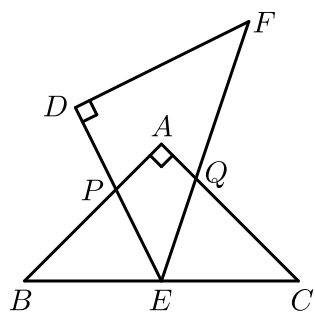


图1

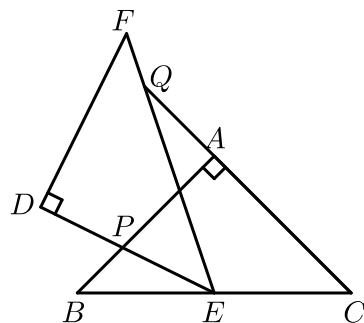


图2

- (1) 求证: $\triangle BPE \sim \triangle CEQ$.
- (2) 已知 $BP = a$, $CQ = \frac{9}{2}a$, 求 P 、 Q 两点间的距离 (用含 a 的代数式表示).

13. 阅读理解：

如图1，若在四边形 $ABCD$ 的边 AB 上任取一点 E （点 E 与点 A, B 不重合），分别连结 ED, EC ，可以把四边形 $ABCD$ 分成三个三角形，如果其中有两个三角形相似，我们就把 E 叫做四边形 $ABCD$ 的边 AB 上的相似点；如果这三个三角形都相似，我们就把 E 叫做四边形 $ABCD$ 的边 AB 上的强相似点。

解决问题：

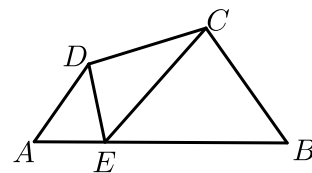


图 1

- (1) 如图1，若 $\angle A = \angle B = \angle DEC = 50^\circ$ ，试判断点 E 是否是四边形 $ABCD$ 的边 AB 上的相似点，并说明理由。
- (2) 如图2，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 5, BC = 2$ ，且 A, B, C, D 四点均在正方形网格（网格中每个小正方形的边长为1）的格点（即每个小正方形的顶点）上，试在图2中画出矩形 $ABCD$ 的边 AB 上的一个强相似点 E 。

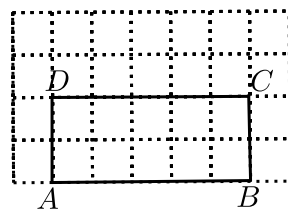
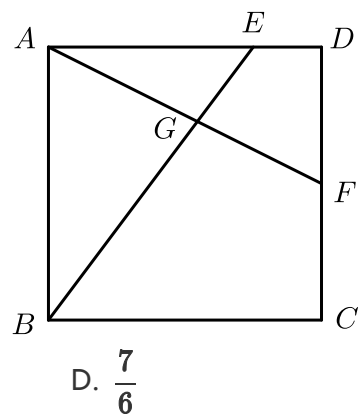


图 2

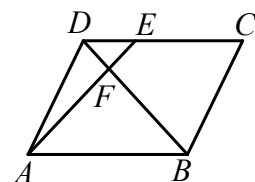
二、相似三角形常用辅助线

14. 如图，正方形 $ABCD$ 中， E 、 F 分别在边 AD 、 CD 上， AF 、 BE 相交于点 G ，若 $AE = 3ED$ ， $DF = CF$ ，则 $\frac{AG}{GF}$ 的值是（ ）。



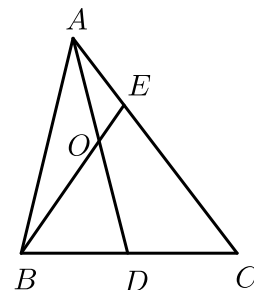
- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{6}{5}$ D. $\frac{7}{6}$

15. 如图，平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 是边 DC 的一个三等分点($DE < CE$)， AE 交对角线 BD 于点 F ，则 $S_{\triangle DEF} : S_{\triangle ABF}$ 等于（ ）。



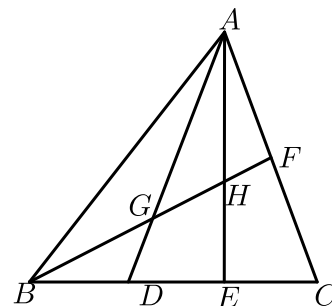
- A. 1 : 3 B. 3 : 1 C. 1 : 9 D. 9 : 1

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 为 BC 边的中点， E 为 AC 边上的任意一点， BE 交 AD 于点 O 。



- (1) 当 $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{2}$ 时，求 $\frac{AO}{AD}$ 的值。
- (2) 当 $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 时，求 $\frac{AO}{AD}$ 的值。
- (3) 猜想 $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{n+1}$ 时 $\frac{AO}{AD}$ 的值，并证明你的猜想。

17. 如图， $\triangle ABC$ 中， E, D 是 BC 边上的三等分点， F 是 AC 的中点， BF 交 AD, AE 于 G, H ，则 $BG : GH : HF$ 等于()。



A. 1 : 2 : 3

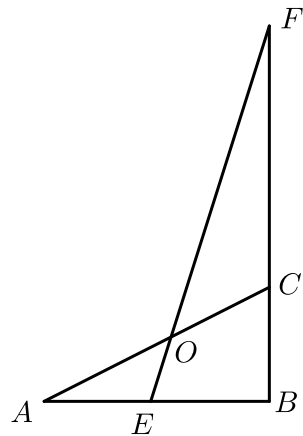
B. 3 : 5 : 2

C. 5 : 3 : 2

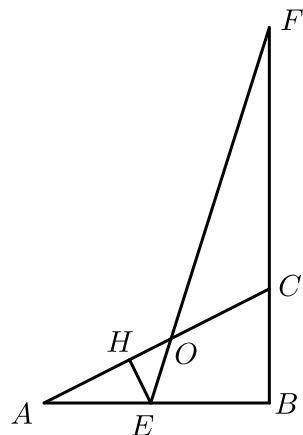
D. 5 : 3 : 1

18. 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $BC = 2$ ， $AB = 4$ ， $\angle B = 90^\circ$ ，点 E 从点 A 出发沿 AB 方向以每秒1个单位速度向点 B 匀速运动，同时点 F 从点 C 出发沿 BC 的延长线方向以每秒2单位的速度运动．当 E 点运动到点 B 时，点 F 停止运动，连接 EF 交 AC 于点 O ，设运动时间为 t 秒．

(1) 如图，当 $AO = OC$ 时，求 t 的值．



(2) 如图，作 $EH \perp AC$ 于点 H ，请求出 OH 的长度．

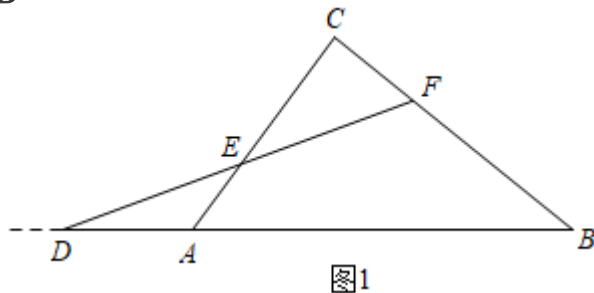


(3) 设线段 EF 的中点为 P ，当 E 点从 A 运动到 B 点，请直接写出 P 点的路径长 _____ ．

19. 在一节数学课上，老师出示了这样一个问题让学生探究：

已知：如图在 $\triangle ABC$ 中，点 D 是 BA 边延长线上一动点，点 F 在 BC 上，且 $\frac{CF}{BF} = \frac{1}{2}$ ，连接 DF 交 AC 于点 E 。

(1) 如图1，当点 E 恰为 DF 的中点时，请求出 $\frac{AD}{AB}$ 的值。



(2) 如图2，当 $\frac{DE}{EF} = a (a > 0)$ 时，请求出 $\frac{AD}{AB}$ 的值（用含 a 的代数式表示）。

思考片刻后，同学们纷纷表达自己的想法：

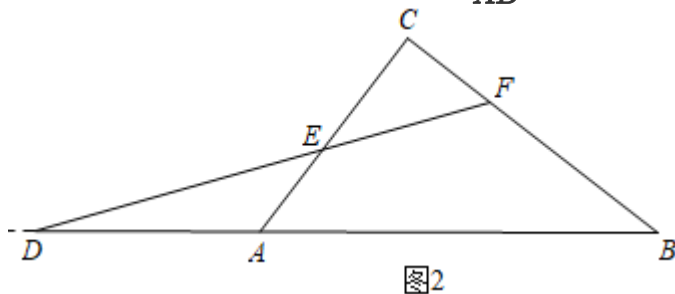
甲：过点 F 作 $FG \parallel AB$ 交 AC 于点 G ，构造相似三角形解决问题；

乙：过点 F 作 $FG \parallel AC$ 交 AB 于点 G ，构造相似三角形解决问题；

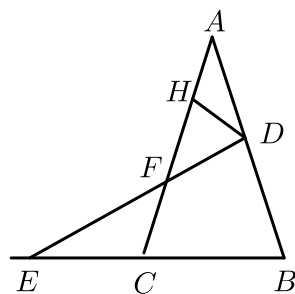
丙：过点 D 作 $DG \parallel BC$ 交 CA 延长线于点 G ，构造相似三角形解决问题；

老师说：“这三位同学的想法都可以”。

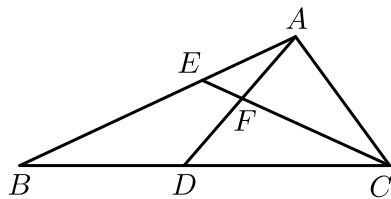
请参考上面某一种想法，完成第(1)问的求解过程，并直接写出第(2)问 $\frac{AD}{AB}$ 的值。



20. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， D 为 AB 边上一点， E 为 BC 延长线上一点， DE 交 AC 于点 F ，点 H 是线段 AF 上一点，若 $\angle ADH = \angle BAC = 36^\circ$ ，记 $\frac{BC}{AB} = m$ ，且 $AD = CE$ ，试用含 m 的代数式表示 $\frac{AC}{HF}$ 。

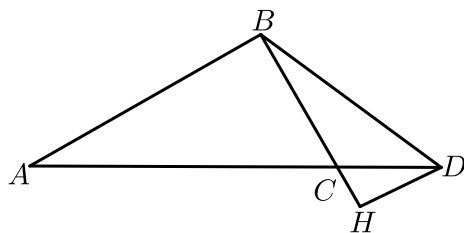


21. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 BC 、 AB 上， $BD = AD = AC$ ， AD 与 CE 相交于点 F ， $AE^2 = EF \cdot EC$ 。



- (1) 求证： $\angle ADC = \angle DCE + \angle EAF$ 。
 (2) 求证： $AF \cdot AD = AB \cdot EF$ 。

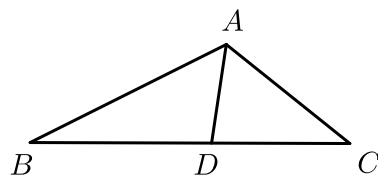
22. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $BC = 3$ ， D 为 AC 延长线上一点， $AC = 3CD$ ．过点 D 作 $DH \parallel AB$ ，交 BC 的延长线于点 H ．



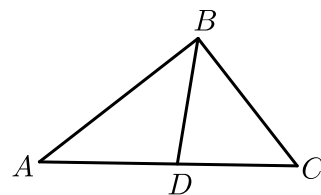
- (1) 若 $\angle CBD = \angle A$ ，求 AB 的长．

23. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 120^\circ$ ， AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D ．求证：

$$\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} .$$



24. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$.

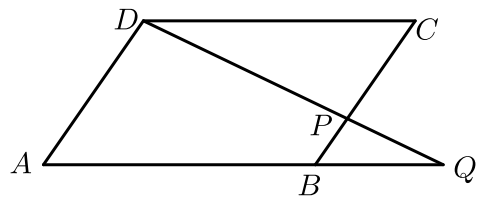


- (1) 当点 D 在斜边 AB 内部时，求证： $\frac{CD^2 - BD^2}{BC^2} = \frac{AD - BD}{AB}$.
- (2) 当点 D 与点 A 重合时，第(1)小题中的等式是否存在？请说明理由 .
- (3) 当点 D 在 BA 的延长线上时，(1)中的等式是否存在？请说明理由 .

25. 证明下列命题 .

(1) 已知 P 为平行四边形 $ABCD$ 边 BC 上任意一点 , DP 交 AB 的延长线于 Q 点 , 求证 :

$$\frac{BC}{BP} - \frac{AB}{BQ} = 1 .$$



(2) 已知 : P 为 $\triangle ABC$ 的中位线 MN 上任意一点 , BP 、 CP 的延长线分别交对边 AC 、 AB 于

$$D、E, \text{ 求证 : } \frac{AD}{DC} + \frac{AE}{EB} = 1 .$$

